Ergänzungen zum Übungsblatt 3

zu Aufgabe 21a)

Das Metall wird mit Photonen der Wellenlänge 220nm bestrahlt. Dies entspricht einer Energie von $9{,}04 \cdot 10^{-19}$ J pro Photon. Es werden (aufgrund des photoelektrischen Effektes) Elektronen freigesetzt, deren kinetische Energie im Bereich von 0 bis $61 \cdot 10^{-20}$ J verteilt ist.
Man kann daher die Energie der Photonen um $61 \cdot 10^{-20}$ J absenken, möchte man die Elektronen lediglich aus dem Metall herauslösen (d.h. die kinetische Energie der Elektronen verschwindet dabei). Dies ist genau dann der Fall, wenn die Photonen eine Energie von $90{,}35 \cdot 10^{-20}$ J - $61 \cdot 10^{-20}$ J = $29{,}35 \cdot 10^{-20}$ J besitzen. Daraus folgt die cut-off Frequenz zu $4{,}43 \cdot 10^{14}$ Hz und die Wellenlänge zu 677,17nm.

zu Aufgabe 22c)

Den zeitlichen Verlauf der Geschwindigkeit erhält man durch Trennung der Variablen und unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung $t_0 = 0$ und $u(t_0) = 0$:

$$\int_{u(t_0)}^{u(t)} du' \cdot \left(1 - \frac{u'^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}} = \left[u' \cdot \left(1 - \frac{u'^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]_0^{u(t)} = u(t) \cdot \left(1 - \frac{u(t)^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \equiv \frac{q \cdot E}{m} \cdot t$$

$$u(t) = \frac{q \cdot E \cdot c \cdot t}{\sqrt{m^2 \cdot c^2 + q^2 \cdot E^2 \cdot t^2}} \quad .$$

Erneute Integration liefert den Verlauf des Ortes:

$$x = \frac{\partial u}{\partial t} \rightarrow x(t) = \int_{t=0}^{t} u(t) \cdot dt = \int_{t=0}^{t} \frac{q \cdot E \cdot c \cdot t}{\sqrt{m^2 \cdot c^2 + q^2 \cdot E^2 \cdot t^2}} \cdot dt = \frac{c}{q \cdot E} \cdot \left(\sqrt{q^2 \cdot E^2 \cdot t^2 + m^2 \cdot c^2} - m \cdot c\right) \quad .$$

zu Aufgabe 23)

Betrachtung im Ruhesystem der Halle:
Die Halle hat hier eine Länge von L_{Halle} und soll sich auf der x-Achse von x_0 bis $x_0 + L_{\text{Halle}}$ erstrecken. Der Stab bewegt sich mit $v = 0.75c$ und hat daher die Länge $\gamma^{-1} \cdot L_{\text{Stab}} < L_{\text{Halle}}$. Zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ seien folgende Anfangsbedingungen gewählt:

$$x_{Stab,l} \equiv 0$$
$$x_{Stab,r} \equiv \gamma^{-1} \cdot L_{Stab}$$
$$x_{Halle,l} \equiv x_0 \quad mit\; x_0 > \gamma^{-1} \cdot L_{Stab}$$
$$x_{Halle,r} \equiv x_0 + L_{Halle}$$

In diesem Bezugssystem ruht die Halle und der Stab bewegt sich. Daher gelten für den zeitlichen Verlauf der "Begrenzungen" von Stab und Halle:

$$x_{Stab,l}(t) = v \cdot t$$
$$x_{Stab,r}(t) = \gamma^{-1} \cdot L_{Stab} + v \cdot t$$
$$x_{Halle,l}(t) = x_0$$
$$x_{Halle,r}(t) = x_0 + L_{Halle}$$

Beide Türen der Halle sollen sich schließen, sobald der Stab die linke Tür passiert hat und sich öffnen, bevor der Stab die rechte Tür berührt. In diesem Bezugssystem werden beide Türen gleichzeitig geöffnet bzw. geschlossen, so dass der Stab tatsächlich für einen kurzen Augenblick in der (eigentlich viel zu kleinen Halle) eingesperrt ist.
Die Türen schließen sich bei

$$x_{Stab,l}(t_1)=x_0 \rightarrow t_1=\frac{x_0}{v}$$

und müssen sich vor dem Zeitpunkt

$$x_{Stab,r}(t_2)=x_0+L_{Halle} \rightarrow t_2=\frac{x_0+L_{Halle}-\gamma^{-1}\cdot L_{Stab}}{v}$$

öffnen.

Im Ruhesystem des Stabes:
Nun betrachten wir die Situation im Ruhesystem des Stabes, indem wir die Lorentz-Transformation durchführen:

$$x'=\gamma\cdot(x-v\cdot t) \qquad t'=\gamma\cdot(t-\frac{v}{c^2}\cdot x)$$

Man sieht, dass in diese Transformation sowohl die Zeit als auch der Ort eines Ereignisses eingehen. Daraus folgt, dass Ereignisse, die in einem Bezugssystem an unterschiedlichen Orten aber zur gleichen Zeit stattfinden, in einem anderen Bezugssystem nicht automatisch gleichzeitig stattfinden.
Wie wirkt sich dies auf unsere Beobachtung aus? Es ist sinnvoll die "Begrenzungen" von Stab und Halle in diesem Bezugssystem zu berechnen. Die Transformation des Ortes ergibt:

$$\begin{aligned}
x_{Stab,l}(t)'&=\gamma\cdot(v\cdot t-v\cdot t)=0\\
x_{Stab,r}(t)'&=\gamma\cdot(\gamma^{-1}\cdot L_{Stab}+v\cdot t-v\cdot t)=L_{Stab}\\
x_{Halle,l}(t)'&=\gamma\cdot(x_0-v\cdot t)\\
x_{Halle,r}(t)'&=\gamma\cdot(x_0+L_{Halle}-v\cdot t)
\end{aligned}$$

An dieser Stelle wird die Zeit noch wie im voherigen Bezugssystem gemessen. Die Transformation der Zeit führt zu:

$$\begin{aligned}
t'&=\gamma\cdot(t-\frac{v}{c^2}\cdot x)\rightarrow t=\gamma^{-1}\cdot t'+\frac{v}{c^2}\cdot x\\
x_{Halle,l}(t')'&=\gamma\cdot\left(x_0-v\cdot\left[\gamma^{-1}\cdot t'+\frac{v}{c^2}\cdot x_0\right]\right)=\gamma^{-1}\cdot x_0-v\cdot t'\\
x_{Halle,r}(t')'&=\gamma\cdot\left(x_0+L_{Halle}-v\cdot\left[\gamma^{-1}\cdot t'+\frac{v}{c^2}\cdot(x_0+L_{Halle})\right]\right)=\gamma^{-1}\cdot(x_0+L_{Halle})-v\cdot t'
\end{aligned}$$

Die Begrenzung des Stabes bleibt hiervon unbeeinflußt, da wir uns in dessen Ruhesystem befinden und die Begrenzung daher keine Zeitabhängigkeit mehr besitzen. Desweiteren kann man dieser Transformation entnehmen, dass die Halle tatsächlich eine Lorentz-Kontraktion erfährt und daher in diesem Bezugssystem eine Länge von $\gamma^{-1}\cdot L_{Halle} < L_{Stab}$ besitzt.
Um das Paradoxon zu lösen, ist es hilfreich zu bestimmen, an welchen Orten sich die Türen der Halle in diesem Bezugssystem befinden, wenn sich die Türen im anderen Bezugssystem schließen bzw. öffnen. Dies führt auf:

$$t_{1,Halle,l}' = \gamma\left(t_1 - \frac{v}{c^2}\cdot x_0\right) \qquad t_{2,Halle,l}' = \gamma\left(t_2 - \frac{v}{c^2}\cdot x_0\right)$$

$$t_{1,Halle,r}' = \gamma\left(t_1 - \frac{v}{c^2}\cdot (x_0 + L_{Halle})\right) \quad t_{2,Halle,r}' = \gamma\left(t_2 - \frac{v}{c^2}\cdot (x_0 + L_{Halle})\right)$$

$$x_{Halle,l}(t_{1,Halle,l}')' = \gamma^{-1}\cdot x_0 - v\cdot\gamma\cdot\left(t_1 - \frac{v}{c^2}\cdot x_0\right) = 0$$

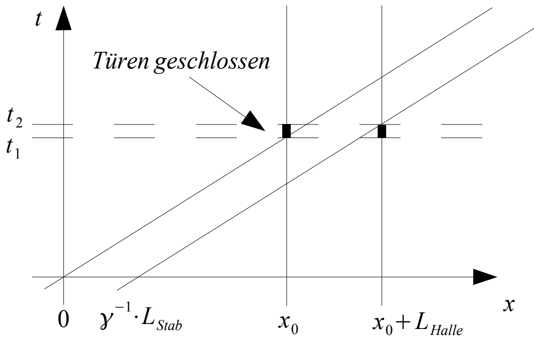
$$x_{Halle,l}(t_{2,Halle,l}')' = \gamma^{-1}\cdot x_0 - v\cdot\gamma\cdot\left(t_2 - \frac{v}{c^2}\cdot x_0\right) = L_{Stab} - \gamma\cdot L_{Halle} < 0$$

$$x_{Halle,r}(t_{1,Halle,r}')' = \gamma^{-1}\cdot (x_0 + L_{Halle}) - v\cdot\gamma\cdot\left(t_1 - \frac{v}{c^2}\cdot (x_0 + L_{Halle})\right) = \gamma\cdot L_{Halle}$$

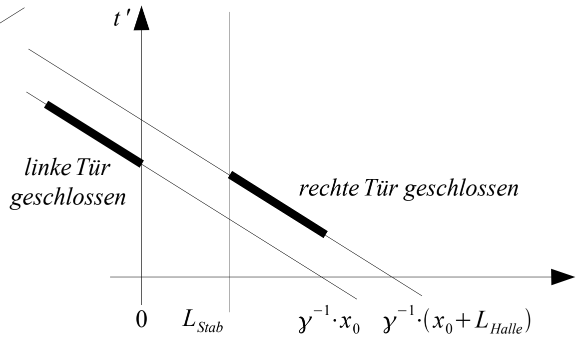
$$x_{Halle,r}(t_{2,Halle,r}')' = \gamma^{-1}\cdot (x_0 + L_{Halle}) - v\cdot\gamma\cdot\left(t_2 - \frac{v}{c^2}\cdot (x_0 + L_{Halle})\right) = L_{Stab}$$

Zum Zeitpunkt $t'_{1,\mathrm{Halle,l}}$ schließt sich die linke Tür der Halle. Zu diesem Zeitpunkt befindet sich sich bei $x'=0$, d.h. am linken Ende des Stabes.Bei $t'_{2,\mathrm{Halle,l}}$ öffnet sie sich und befindet sich bei $x' = L_{\mathrm{Stab}} - \gamma \cdot L_{\mathrm{Halle}} < 0$ (folgt aus $\gamma^{-1} \cdot L_{\mathrm{Stab}} < L_{\mathrm{Halle}}$). Daraus folgt, dass sich der Stab stets rechts von der Tür befindet, sobald sie geschlossen ist (da nach Voraussetzung $x'_{\mathrm{Stab,l}} = 0$).
Die rechte Tür schließt sich zum Zeitpunkt $t'_{1,\mathrm{Halle,r}}$, bei dem sie sich am Ort $\gamma \cdot L_{\mathrm{Halle}} > L_{\mathrm{Stab}}$ befindet. Sie öffnet sich wieder bei $t'_{2,\mathrm{Halle,r}}$, wo sie das rechte Ende des Stabes bei $x' = L_{\mathrm{Stab}}$ berührt. Man erkennt, dass sich der Stab links von der Tür befindet, solange sie geschlossen ist.

Die Situation stellt sich daher in beiden Bezugssystemen völlig unterschiedlich dar. Im Ruhesystem der Halle kontrahiert der Stab, so dass er kürzer wird als die Halle. Dadurch kann er für einen (sehr kurzen) Zeitraum in der Halle eingesperrt werden, indem beide Türen gleichzeitig geschlossen und geöffnet werden.
Im Ruhesystem des Stabes kontrahiert der Raum, so dass der Stab zu keinem Zeitpunkt in die Halle passt. Dafür schließen sich die beiden Türen nicht mehr gleichzeitig. Vielmehr schließt und öffnet sich die rechte Tür bevor sich die linke Tür schließt, so dass der Stab "hindurchschlüpfen" kann, ohne von den geschlossenen Türen behindert zu werden.



Ruhesystem der Halle



Ruhesystem des Stabes