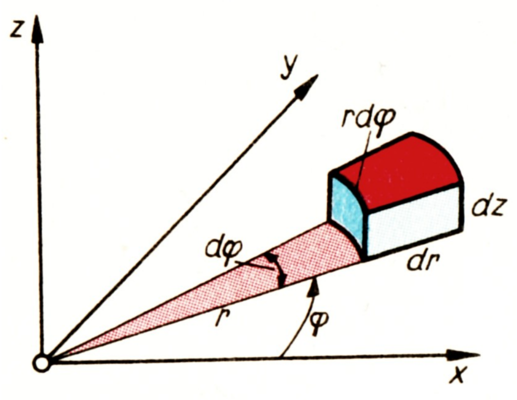
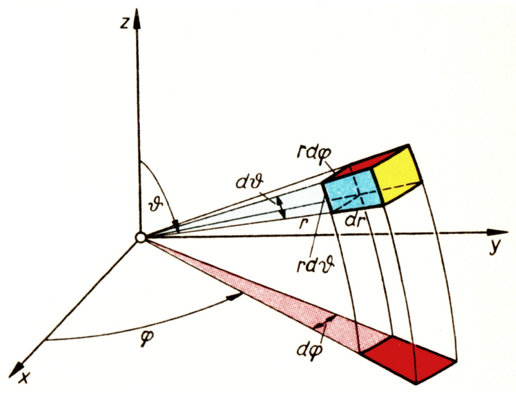
Transformation des Volumenelements

Oft ist es zweckmäßig einen Raum R nicht in rechtwinkligen karthesischen sondern in einem anderen Koordinatensystem darzustellen. Am gebräuchlichsten sind Zylinder- und Kugelkoordinaten.





Zylinderkoordinaten

$$\vec{r}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

$$r=\sqrt{(x^2+y^2)},\quad \tan\varphi=\frac{y}{x}$$

Kugelkoordinaten

$$\vec{r}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=r\begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

$$r=\sqrt{(x^2+y^2+z^2)},\quad \cos\vartheta=\frac{z}{r},\quad \tan\varphi=\frac{y}{x}$$

Zylinderkoordinaten: r und φ sind die Polarkoordinaten der Projektion eines Punktes auf die Hauptebene (gewöhnlich x,y-Ebene), z ist die Applikated, d.h. der Abstand des Punktes von der Hauptebene. Legt man für die Zylinderkoordinaten die Wertebereiche $0\leqslant r\leqslant\infty$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$ und $-\infty\leqslant z\leqslant\infty$ fest, so kann man eindeutig alle Punkte des Raumes abbilden.
Kugelkoordinaten: r – Abstand zum Koordinatenursprung, φ – geographische Länge und ϑ – geographische Breite. Legt man für die Kugelkoordinaten die Wertebereiche $0\leqslant r\leqslant\infty$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$ und $0\leqslant\vartheta\leqslant\pi$ fest, so erhält man eindeutig alle Punkte des Raumes (völlig analog zu den geographischen Koordinaten auf der Erde).

Zur Herleitung des Raumelementes dV geht man davon aus, das die alten Veränderlichen x, y, z mit neuen Koordinaten u, v, w durch eindeutig, differenzierbare Funktionen verknüpft sind $u=u(x,y,z), v=v(x,y,z), w=w(x,y,z)$, die stetige partielle Ableitungen besitzen. Da die Basen eines Kordinatensystems linear unabhängig sind, kann die Funktionaldeterminante $D(u,v,w)$ (die Determinante der *JACOBI*-Matrix) nicht Null sein. Raumelement berechnet sich dann durch $dV=dx\,dy\,dz=|D|\,du\,dv\,dw$, wobei die *JACOBI*-Matrix durch

$$D(u,v,w)=det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$ gegeben ist.

Die Determinante $D(u,v,w)$ läßt sich hier leicht durch die Regel von Sarrus erhalten. Als Beispiel soll die Funktionaldeterminante für die Kugelkoordinaten berechnet werden, d.h $f(x,y,z) \to f(r,\vartheta,\varphi)$.

$$x = r\sin\vartheta\cos\varphi \;\Rightarrow\; \frac{dx}{dr} = \sin\vartheta\cos\varphi\,,\;\; \frac{dx}{d\vartheta} = r\cos\vartheta\cos\varphi\,,\;\; \frac{dx}{d\varphi} = -r\sin\vartheta\sin\varphi$$

$$y = r\sin\vartheta\sin\varphi \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dr} = \sin\vartheta\sin\varphi\,,\;\; \frac{dy}{d\vartheta} = r\cos\vartheta\sin\varphi\,,\;\; \frac{dy}{d\varphi} = -r\sin\vartheta\cos\varphi$$

$$z = r\cos\vartheta \;\Rightarrow\; \frac{dz}{dr} = \cos\vartheta\,,\;\; \frac{dz}{d\vartheta} = -r\sin\vartheta\,,\;\; \frac{dz}{d\varphi} = 0$$

$$D_{Kgl}(r,\vartheta,\varphi) = \begin{vmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & \sin\vartheta\sin\varphi & \cos\vartheta \\ r\cos\vartheta\cos\varphi & r\cos\vartheta\sin\varphi & -r\sin\vartheta \\ -r\sin\vartheta\sin\varphi & r\sin\vartheta\cos\varphi & 0 \end{vmatrix}$$

$$D_{Kgl}(r,\vartheta,\varphi) = \left(\sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta\right) r^2\sin\vartheta\sin^2\varphi + \left(\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta\right) r^2\sin\vartheta\cos^2\varphi = r^2\sin\vartheta$$

Die Determinante der *JACOBI*-Matrix für Zylinderkoordinaten ist $D_{Zyl}(r,\varphi,z) = r$.